

Aufgaben zu Integral der e-Funktion

1 Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = e^{1-2x}$

c) $f(x) = 2 \cdot e^{5x+1}$

d) $f(x) = \frac{2}{(e^x)^2}$

e) $f(x) = 1 - e^{2-x}$

f) $f(x) = e^x + e^{-x}$

g) $f(x) = x^2 + e^{-2x}$

h) $f(x) = \frac{2}{e^x}$

i) $f(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$

2 Berechnen Sie das bestimmte Integral.

a) $\int_2^1 3e^{2x} dx$

b) $\int_2^0 (e^x + e^{3x+1}) dx$

c) $\int_2^{\ln 2} (1 - e^x)^2 dx$

3.0 Während eines Poetry-Slams wird die Zustimmung zum Vortrag zweier Kandidaten A und B durch die Lautstärke des Applauses des Publikums bestimmt.

3.1 Die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 4x \cdot e^{-x+1}$ und g mit $g(x) = 2x \cdot e^{-2x+3}$ sind in folgendem Diagramm dargestellt.

Ordnen Sie die Funktionen f und g den Graphen im Diagramm zu.



3.2 Zeigen Sie: Die Funktion F mit $F(x) = 4 \cdot (-e \cdot x - e) \cdot e^{-x}$ und G mit $G(x) = 0,5 \cdot (2x+1) \cdot e^{-2x+3}$ sind Stammfunktionen der Funktionen f und g.

3.3 Die Beliebtheit der Kandidaten kann durch den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^8 f(x) dx \text{ bzw. } \int_0^8 g(x) dx \text{ ausgedrückt werden, wobei ein größerer Wert größere}$$

Beliebtheit anzeigt. Zum Kandidat A gehört der Graph der Funktion g und zum Kandidat B gehört der Graph der Funktion f.

Entscheiden Sie, welcher Kandidat bei dem Wettbewerb beliebter ist.

Lösungen

$$1a) F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

$$1b) F(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{1-2x} + C$$

$$1c) F(x) = \frac{2}{5} \cdot e^{5x+1} + C$$

$$1d) f(x) = 2 \cdot e^{-2x} \Rightarrow F(x) = -e^{-2x} + C$$

$$1e) F(x) = x + e^{2-x} + C$$

$$1f) F(x) = e^x - e^{-x} + C$$

$$1g) F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$1h) f(x) = 2e^{-x} \Rightarrow F(x) = -2e^{-x} + C$$

$$1i) f(x) = e^x \cdot (1 - e^x)^{-2} \Rightarrow F(x) = (1 - e^x)^{-1} + C$$

$$2a) \left[\frac{3}{2}e^{2x} \right]_2^1 = \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2}e^4 \approx -70,81$$

$$2b) \left[e^x + \frac{1}{3}e^{3x+1} \right]_2^0 = (e^0 + \frac{1}{3}e) - (e^2 + \frac{1}{3}e^7) \approx 1,91 - 372,93 \approx -371,02$$

2c)

$$\int_2^{\ln 2} (1 - 2e^x + e^{2x}) dx = \left[x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_2^{\ln 2} = (\ln 2 - 2e^{\ln 2} + \frac{1}{2}e^{2\ln 2}) - (2 - 2e^2 + \frac{1}{2}e^4)$$

$$= (\ln 2 - 4 + 2) - (2 - 2e^2 + \frac{1}{2}e^4) = \ln 2 + 2e^2 - \frac{1}{2}e^4 - 4 \approx -15,83$$

3.1

$$f(x) = 4xe^{-x+1} \quad f'(x) = 4e^{-x+1} + 4xe^{-x+1} \cdot (-1) = 4e^{-x+1} \cdot (1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Skizze von f' : $4e^{-x+1}$ immer positiv

Skizze von $(1-x)$:

$$\Rightarrow x = 1 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(1|4)$$

$$g(x) = 2xe^{-2x+3} \quad g'(x) = 2e^{-2x+3} + 2x \cdot e^{-2x+3} \cdot (-2) = 2e^{-2x+3} \cdot (1-2x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = 0,5$$

Skizze von g' : $2e^{-2x+3}$ immer positiv

Skizze von $(1-2x)$:

$$\Rightarrow x = 0,5 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(0,5|e^2)$$

3.2

$$F'(x) = 4 \cdot (-e) \cdot e^{-x} + 4 \cdot (-e \cdot x - e) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 4e^{-x} \cdot (-e + e \cdot x + e) =$$

$$= 4e^{-x} \cdot e \cdot x = 4e^{-x+1} = f(x)$$

$$G'(x) = 0,5 \cdot 2 \cdot e^{-2x+3} + 0,5 \cdot (2x+1) \cdot e^{-2x+3} \cdot (-2) = 0,5 \cdot e^{-2x+3} \cdot (2-4x-2) =$$

$$= -2x \cdot e^{-2x+3} = g(x)$$

3.3

$$\int_0^8 f(x) dx = \left[4(-ex - e) \cdot e^{-x+1} \right]_0^8 \approx 10,84$$

$$\int_0^8 g(x) dx = \left[0,5(2x+1) \cdot e^{-2x+3} \right]_0^8 \approx 10,04$$

$\Rightarrow$ Zur Kandidatin B gehört der Graph der Funktion f . Sie gewinnt den Poetry-Slam.